פתרונות לתרגיל 2

1)

$$f(z)=\frac{iz+2}{2i-z}=\frac{i(z-2i)}{2i-z}=-i$$

פ' קבועה גזירה ולכן מקיימת תנאי קושי רימן.

$$f(z)=\frac{1}{\operatorname{Im} z+i}\qquad z=x+iy$$

היא פ' של y בלבד ולא קבוע לכן היא לא מקיימת משוואות של CR.

2) $\operatorname{Im} f(z)=\frac{y}{x^2+y^2}$. מ"פ רואים ש $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{-y}{x^2+y^2}$

לכן $f(z)=-\frac{1}{z}+C$

$f(2)=0\Rightarrow C=\frac{1}{2}$

תשובה: $f(z)=-\frac{1}{z}+\frac{1}{2}$

3) א) $J=\begin{pmatrix}2x & -2y\\ -2y & -2x\end{pmatrix}$ ותנאי CR מתקיימים רק ב $(0,0)$

ב) $J=\begin{pmatrix}\frac{2x}{x^2+y^2} & \frac{2y}{x^2+y^2}\\ -\frac{2y}{x^2+y^2} & \frac{2x}{x^2+y^2}\end{pmatrix}$ ולכן CR מתקיימים עבור כל x,y

הערה: שימו לב ש $f(z)=\log(x^2+y^2)+2i\operatorname{arccot}\frac{x}{y}$ היא פשוט $f(z)=\ln(z^2)=2\ln z$

4) אם f אנליטית אז $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$

אם f אנליטית אז $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

לכן $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. בקומה לט.

<u>הערה</u> פונקציות ממשיות $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$
המקיימות $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$
נקראות פ' <u>הרמוניות</u>. נלמד עליהם בהמשך.

5) א) נניח כי $f(z)$, $\overline{f(z)}$ אנליטית

$$\begin{aligned} f(z)=u+iv &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \\ \overline{f(z)}=u-iv &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

לכן $0=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$ לכן $v\equiv c_1$ לכן גם $u\equiv c_2$, לכן f היא פונקציה קבועה

ב)
$$f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$$
$$g(x,y)=u(x,-y)-iv(x,-y)$$

לכן g היא בפרט דיפרנציאבילית ומספיק להראות
היא מקיימת תנאי CR.

$$J(g)=\begin{pmatrix} \frac{\partial u(x,-y)}{\partial x} & -\frac{\partial u(x,-y)}{\partial y} \\ -\frac{\partial v(x,-y)}{\partial x} & \frac{\partial v(x,-y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

f אנליטית לכן
g היא גם אנליטית.

6) עבור כל נק' $z \neq z_0, \ldots z_k$

מתקיים $p(z)\neq 0$ לכן ניתן להגדיר

בסביבה של $p(z)$ פונקציית $\ln$

$$(\ln p(z))' = \frac{p'(z)}{p(z)}$$

מצד שני

$$(\ln p(z))' = (\ln(z-\alpha_1)+\dots \ln(z-\alpha_k))' = \frac{1}{z-\alpha_1}+\dots\frac{1}{z-\alpha_k}$$

ב) $Re(z-z_j)=Re(z)-Re(z_j)>0$

לכן $Re\left(\frac{1}{z-z_j}\right)>0$ לכן $Re\left(\sum \frac{1}{z-z_j}\right)>0$

לכן $p'(z)\neq 0$.

7) אם $f:\Omega\to\mathbb{R}$ אנליטית, זה אומר

$$f=u+iv, \quad v\equiv 0$$

מתנאי CR נקבל מיד ש $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$

לכן $f=u=$ קבוע